

Dans cette séance on va voir

- (i) la définition (abstraite) d'application linéaire, avec quelques exemples;
- (ii) les définitions de noyau et d'image d'une application linéaire;
- (iii) la matrice canonique d'une application linéaire  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ;
- (iv) les opérations sur les matrices (somme, produit, inverse, transposée, etc);
- (v) la matrice identité.

cela inclut les cas  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

On va omettre les sections 4.5, 4.7, 4.8, ainsi que Lemme 6 et Thm. 4.46 pour l'instant ☹☹☹

## § 4.6. Applications linéaires entre espaces vectoriels

On rappelle cette définition (généralisation de la Déf. A)

Déf. 4.37 | Soit  $f: V \rightarrow V'$  une application entre deux ensembles  $V$  et  $V'$ .

Pour  $v \in V$ ,  $v' = f(v) \in V'$  est l'image de  $v$  par  $f$ , et  $v$  est un antécédent ou une préimage (ou image inverse) de  $v'$  par  $f$ .

Pour  $S \subseteq V$  et  $S' \subseteq V'$  deux parties, on rappelle aussi:

$$f(S) = \{v' \in V' : \exists v \in S \text{ t.q. } f(v) = v'\} = \{f(v) : v \in S\} \leftarrow \text{image de } S \text{ par } f$$

$$f^{-1}(S') = \{v \in V : f(v) \in S'\} \leftarrow \text{image inverse (ou image réciproque ou préimage) de } S' \text{ par } f$$

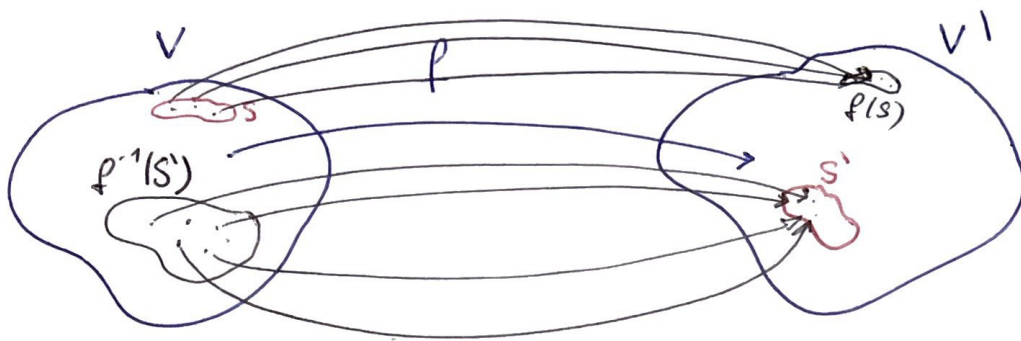
et

$$\text{Im}(f) = f(V) = \{v' \in V' : \exists v \in V \text{ t.q. } f(v) = v'\} = \{f(v) : v \in V\} \leftarrow \text{image de } f$$

ainsi que

Déf. 4.38 | Une application  $f: V \rightarrow V'$  entre deux ensembles  $V$  et  $V'$  est dite

- injective si, pour toute paire  $(v, w) \in V^2$  avec  $v \neq w$ , alors  $f(v) \neq f(w)$ ; ( $\equiv \forall v, w \in V, f(v) = f(w) \Rightarrow v = w$  ?)
- surjective si, pour tout  $v' \in V'$ , il existe  $v \in V$  t.q.  $f(v) = v'$
- $\Leftrightarrow \text{Im}(f) = V'$
- bijjective si elle est injective et surjective.



**RK G(p64)** Si  $f: V \rightarrow V'$  est bijective, l'application  $V' \rightarrow V$  qui associe à  $v' \in V'$  l'unique  $v \in V$  t.g.  $f(v) = v'$  est bien définie. Elle s'appelle application réciproque de  $f$ , et elle est notée  $f^{-1}$ .

**Déf. 4.39** Soient  $V$  et  $V'$  deux espaces vectoriels. Une application  $f: V \rightarrow V'$  est dite linéaire si  $f(v + \lambda w) = f(v) + \lambda f(w)$ ,  $\forall v, w \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ .

**RK H** C'est la même définition que celle dans Déf. 3.13 pour  $V = \mathbb{R}^n$  et  $V' = \mathbb{R}^m$ . En plus, la condition précédente n'est pas précisément la même que celle dans le notes de Sacha Friedli, mais les deux sont équivalentes  $\nabla$ . Noter que si  $T$  est linéaire,  $T(0_V) = 0_W$  (même preuve que pour  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ).

**Exemple 4.43\* (modifié)** Soit  $V = \mathbb{P}$  l'espace vectoriel de polynômes. On considère l'application  $f: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}^2$  donnée par

$$f(p) = \begin{pmatrix} \int_0^1 p(t) dt \\ p'(1) \end{pmatrix} \quad \text{pour } p \in \mathbb{P}.$$

Alors  $f$  est linéaire, vu que

$$\begin{aligned} f(p + \lambda q) &= \begin{pmatrix} \int_0^1 (p + \lambda q)(t) dt \\ (p + \lambda q)'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^1 (p(t) + \lambda q(t)) dt \\ (p' + \lambda q')(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^1 p(t) dt + \lambda \int_0^1 q(t) dt \\ p'(1) + \lambda q'(1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \int_0^1 p(t) dt \\ p'(1) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \int_0^1 q(t) dt \\ q'(1) \end{pmatrix} = f(p) + \lambda f(q), \quad \forall p, q \in \mathbb{P}, \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Déf. 4.44 | Étant donné une application linéaire  $T: V \rightarrow W$  entre deux espaces vectoriels  $V$  et  $W$ , le noyau de  $T$  est

$$\text{Ker}(T) = \{v \in V : T(v) = 0_W\} = T^{-1}(\{0_W\})$$

Lemme Fondamental (Lemme 7) | Pour une application linéaire  $T: V \rightarrow W$ ,  $T$  est injective si et seulement si  $\text{Ker}(T) = \{0_V\}$ .

(Preuve) Si  $T$  est injective, comme  $T(0_V) = 0_W$ , alors pour tout  $v \neq 0_V$  on a  $T(v) \neq T(0_V) = 0_W$ , i.e.  $v \notin \text{Ker}(T)$ , ce qui nous dit que  $\text{Ker}(T) = \{0_V\}$ .  
Réciproquement, on suppose  $\text{Ker}(T) = \{0_V\}$ . Or étant donné  $v, v' \in V$  avec  $v \neq v'$ , il suffit de montrer que  $T(v) \neq T(v')$ . Si ce n'est pas le cas, i.e.  $T(v) = T(v')$ , alors  $T(v - v') = 0_W$ , i.e.  $v - v' \in \text{Ker}(T) = \{0_V\}$ , ce qui nous dit que  $v = v'$ . Mais cela est absurde, et donc  $T(v) \neq T(v')$ .  $\square$

Quelques propriétés

(Lemme 8) | Pour une application linéaire  $T: V \rightarrow W$  entre deux espaces vectoriels, on a que

- $\text{Ker}(T)$  est un sous-espace vectoriel de  $V$ ;
- $\text{Im}(T)$  est un sous-espace vectoriel de  $W$ .

(Lemme 9) | Si  $T: V \rightarrow W$  est une application linéaire bijective, alors l'application réciproque  $T^{-1}: W \rightarrow V$  est aussi linéaire.

(Preuve) Comme  $T(0_V) = 0_W$ , on a que  $0_V \in \text{Ker}(T)$  et  $0_W \in \text{Im}(T)$ .  
En outre, si  $u, v \in \text{Ker}(T)$ , i.e.  $T(u) = T(v) = 0_W$ , alors  $u + \lambda v \in \text{Ker}(T)$  pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ , vu que  $T(u + \lambda v) = T(u) + \lambda T(v) = 0_W + \lambda \cdot 0_W = 0_W$ . En conséquence,  $\text{Ker}(T)$  est un sous-espace vectoriel de  $V$ . (Exo 2, série 3)

Par ailleurs, si  $w, w' \in \text{Im}(T)$ , il existe  $u, u' \in V$  tels que  $w = T(u)$  et  $w' = T(u')$ , ce qui nous dit que  $w + \lambda w' = T(u) + \lambda T(u') = T(u + \lambda u') \in \text{Im}(T)$  par  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Par conséquent,  $\text{Im}(T)$  est un sous-espace vectoriel de  $W$ .

Finalement, si  $T$  est linéaire et bijective on voit que  $T$  linéaire?  $\forall w, w' \in W$   
 $T(T^{-1}(w + \lambda w')) = w + \lambda w' = T(T^{-1}(w)) + \lambda T(T^{-1}(w')) = T(T^{-1}(w) + \lambda T^{-1}(w'))$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

L'injectivité de  $T$  nous dit alors que

$$T^{-1}(w + \lambda w) = T^{-1}(w) + \lambda T^{-1}(w)$$

comme on voulait démontrer

On verra les autres définitions et résultats du Chapitre 4 plus tard  $\square$

Chapitre 5  $\leftarrow$  Seulement § 5.1 et § 5.5 pour l'instant

§ 5.1 Matrice d'une application linéaire  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Déf. B Soit  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  une application linéaire. On définit

la matrice

m lignes

$$[T] = \begin{bmatrix} \underbrace{T(\bar{e}_1)}_{\in \mathbb{R}^m} & \dots & \underbrace{T(\bar{e}_n)}_{\in \mathbb{R}^m} \end{bmatrix}, \text{ où}$$

$$\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \bar{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

est une famille distinguée dans  $\mathbb{R}^n$

est appelée la matrice canonique (ou représentation matricielle canonique) de  $T$ .  $n$  colonnes

Thm 5.1 Si  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  est une application linéaire, alors

$$(*) \quad T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = [T] \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

produit matrice et vecteur

En plus, la matrice  $[T]$  est la unique matrice qui satisfait (\*), i.e. s'il existe  $A \in M(\mathbb{R})$  telle que  $T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ , alors  $A = [T]$ .

(Preuve) Pour prouver (\*) on utilise que

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T(x_1 \bar{e}_1 + \dots + x_n \bar{e}_n) = x_1 T(\bar{e}_1) + \dots + x_n T(\bar{e}_n) = \begin{bmatrix} T(\bar{e}_1) & \dots & T(\bar{e}_n) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Pour l'unicité, on écrit

$$[T] \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow [T] \cdot \bar{e}_i = A \cdot \bar{e}_i, \quad \forall i \in [1, n]$$

$$\Rightarrow [T] = A$$

$\square$

# Chapitres 6 et 7 + § 5.5 Opérations sur les matrices 19

**Déf. C** On rappelle que  $M_{m \times n}(\mathbb{R}) = \{ \text{A matrice de taille } m \times n \text{ à coefficients réels} \}$  et qu'on a défini la somme de matrices et le produit d'une matrice avec un scalaire par

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & \dots & A_{m,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{1,1} & \dots & B_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{m,1} & \dots & B_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1}+B_{1,1} & \dots & A_{1,n}+B_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m,1}+B_{m,1} & \dots & A_{m,n}+B_{m,n} \end{pmatrix} \text{ et } \lambda \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & \dots & A_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda A_{1,1} & \dots & \lambda A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{m,1} & \dots & \lambda A_{m,n} \end{pmatrix}$$

matrices de la même taille ? matrices de la même taille ?

**Déf. 6.2** Si  $A \in M_{p \times m}(\mathbb{R})$  et  $B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , on définit le produit de A et B par la matrice  $C \in M_{p \times n}(\mathbb{R})$  donnée par

$$C_{i,j} = \sum_{k=1}^m A_{i,k} B_{k,j} = A_{i,1} B_{1,j} + A_{i,2} B_{2,j} + \dots + A_{i,m} B_{m,j}$$

pour  $i \in [1, p]$  et  $j \in [1, n]$ .

**Exemple 6.3\*** (modifié)

2ème ligne  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \\ -3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \mathbf{21} & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$

$A \in M_{3 \times 4}$   $B \in M_{4 \times 2}$   $C \in M_{3 \times 2}$

égale ? 2 colonnes 3 lignes

coefficient de la 2ème ligne et la 1ère colonne de C:  $3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (-2) \cdot (-3) + 1 \cdot 7 = 21$

**RK I** Si B est un vecteur colonne, i.e.  $B \in M_{m \times 1}(\mathbb{R})$ , alors le produit précédent est précisément le produit d'une matrice avec un vecteur colonne (Déf. 3.1)

**Déf 5.21** Si  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , on définit la matrice transposée  $A^T \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$  par  $(A^T)_{j,i} = A_{i,j}, \forall i \in [1, m], j \in [1, n]$ .

Exemple 5.22\* (modifié)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

on écrit souvent  $M_m(\mathbb{R})$  au lieu de  $M_{m \times m}(\mathbb{R})$

**Déf 6.7** Étant donné  $A \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$  et  $B \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$ , on dit que  $A$  et  $B$  commutent si  $A \cdot B = B \cdot A$ .

matrices carrées de taille  $m$

**Exemple 6.6** Montrer que  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  ne commutent pas.

**Déf 6.8** La matrice identité de taille  $n$  est la matrice

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in M_{n \times n}(\mathbb{R}).$$

↑ sort diagonale ? (sinon zéro)

**Déf. 7.1** Étant donné  $A \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$ , on dit que  $A$  est inversible s'il existe une matrice  $B \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$  telle que  $B \cdot A = A \cdot B = I_n$ . La matrice  $B$  est alors unique (démontrez-le!) et elle est notée  $A^{-1}$ .

**Quelques propriétés** (Proposition 5, p. 98 + Proposition 6, p. 102)

(i)  $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ ,  $\forall A \in M_{p \times m}(\mathbb{R}), B \in M_{m \times n}(\mathbb{R}), C \in M_{n \times q}(\mathbb{R})$ ;

(ii)  $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ ,  $\forall A \in M_{p \times m}(\mathbb{R}), \forall B, C \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ ;

(iii)  $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ ,  $\forall A, B \in M_{p \times m}(\mathbb{R}), \forall C \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ ;

(iv)  $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ ,  $\forall A \in M_{p \times m}(\mathbb{R}), B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ ;

(v)  $(A^{-1})^{-1} = A$ ,  $\forall A \in M_m(\mathbb{R})$  inversible;

(vi)  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ ,  $\forall A \in M_m(\mathbb{R})$  inversible;

(vii)  $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ ,  $\forall A, B \in M_m(\mathbb{R})$  inversibles, (viii)  $I_m \cdot A = A \cdot I_n = A$   $\forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ .

(Preuve) Exercice.  $\square$   
(voir les notes de Sacha)